

SECONDARIA SUPERIORE/SAGGI

HANS FREUDENTHAL

**RIPENSANDO
L'EDUCAZIONE
MATEMATICA**

a cura di Carlo Felice Manara

**EDITRICE
LA SCUOLA**

HANS FREUDENTHAL

RIPENSANDO
L'EDUCAZIONE MATEMATICA

Lezioni tenute in Cina

traduzione, introduzione e cura

di

Carlo Felice Manara

EDITRICE LA SCUOLA

INTRODUZIONE

di

CARLO FELICE MANARA

1. LA FIGURA E L'OPERA DI HANS FREUDENTHAL

Potrebbe apparire inutile, e quindi presuntuoso, tentare di presentare la figura e l'opera di Hans Freudenthal; oso tuttavia scrivere qualche parola a questo proposito, nella speranza di fare opera utile per il Lettore italiano.

Freudenthal è morto ultraottantenne il 13 ottobre 1990, ed ha lavorato intellettualmente nel campo dell'educazione matematica fino agli ultimi periodi della sua vita attivissima; il suo contributo in questo campo di ricerca è attestato da più di 200 pubblicazioni, elencate nella lista bibliografica che si trova alla fine di questo volume. Il fatto che egli abbia scritto molti dei suoi contributi nella lingua del suo Paese, l'Olanda, non ha impedito che la sua opera fosse conosciuta in campo internazionale, e la sua autorità fosse giustamente apprezzata da coloro che si occupano di educazione*.

La personalità di Freudenthal è bene messa in evidenza da Alan J. Bishop, nella prefazione a questo volume: due aspetti di quella personalità vorrei ricordare qui, perché mi sembra che siano illuminanti, per poter comprendere ed apprezzare meglio un'opera che si impone da sé alla nostra attenzione. Il primo è una caratteristica intellettuale di Freudenthal: uomo pieno di intelligente curiosità, attento alla realtà globale, schivo delle astrazioni inutili, vivacissimo fino agli estremi della sua vita. Il secondo si rileva in modo spiccatissimo dalle relazioni delle sue esperienze personali e da tutta la sua didattica: si tratta del rispetto per l'uomo, e dell'amore per i giovani. Come si ve-

* Alcuni contributi di Freudenthal sono stati tradotti in italiano; segnalo qui quello pubblicato nel «Quad. UMI» n. 10 dedicato a *La didattica della matematica oggi* (a cura di Roberto Sitia). Ivi si legge la relazione tenuta da Freudenthal al II Congresso ICMI (International Commission for Mathematical Instruction) tenutosi ad Exeter; relazione il cui titolo in italiano è: *Il significato di gruppo in matematica e la sua possibile introduzione nell'insegnamento matematico*.

Inoltre è stata tradotta l'allocuzione inaugurale tenuta da Freudenthal al IV congresso ICMI (Berkeley 1980). Il titolo della traduzione italiana è: *I grandi problemi dell'educazione matematica*, in «Rivista di matematica e delle scienze integrate», Vol. XIII, n. 6 (giugno 1990).

drà, il suo atteggiamento didattico può presentare dei caratteri di grande complessità; a tal punto che, a conclusione della lettura, qualcuno potrebbe dedurre che un lavoro didattico ispirato alle idee di Freudenthal non è per nulla semplice e scevro di fatica; ma mi sembra si possa dire che tutto il suo pensiero è diretto da un'idea ispiratrice: si tratta, ripeto, del rispetto per l'uomo, e soprattutto per il giovane. Questo atteggiamento di Freudenthal è attestato da tutto il volume che abbiamo sotto gli occhi; mi limito qui ad una sola citazione, che mi pare esemplare: scrive infatti Freudenthal :«Il valore che si attribuisce ai discendenti come esseri umani determina il modo in cui ci si aspetta che essi imparino la loro matematica: con libertà oppure da schiavi, guidati oppure imbrigliati».

Il rispetto per l'uomo è fondato anche sulla fiducia che Freudenthal possiede sulle capacità razionali e creative della mente umana; capacità che sono ignorate e spesso addirittura sprecate e coartate da certe dottrine pedagogiche le quali ispirano alcune concezioni della matematica e della sua didattica che Freudenthal combatte a ragione. Si potrebbe dire che per lui l'apprendimento deve sostanzialmente essere appropriazione, e quindi acquisizione di un certo atteggiamento, piuttosto che accumulo di nozioni. Oso dire addirittura che, nell'ambito della matematica, l'acquisizione di abilità e l'impiego di procedure e di algoritmi imposti e memorizzati, senza che siano compresi e motivati, rischia, al limite, di diventare un addestramento analogo a quello degli animali da circo. E penso che qui stia il fondamento per le critiche, spesso radicali, che Freudenthal muove, in forma più o meno esplicita, a certe dottrine pedagogiche; critiche che si incontrano molto frequentemente nelle pagine del libro, e che il Lettore attento ed intelligente non mancherà di rilevare.

Un ultimo aspetto affascinante della personalità di Freudenthal, che vorrei qui ricordare, è la sua passione per l'insegnamento; anche questa passione si manifesta quasi ad ogni pagina, come il Lettore non potrà non constatare; e questa passione, aiutata dalla straordinaria creatività del Nostro, lo porta a presentare tutta una gamma di espedienti didattici che suscitano giustificata ammirazione; tra i tanti esempi possibili di queste qualità, ricordo qui le belle pagine intitolate rispettivamente «Mondi strani» e «Contesti ricchi».

Vorrei richiamare qui le parole di un grande matematico italiano, Giuseppe Peano, che pure dedicò molta attenzione alla didattica della matematica. Scrisse Peano che «...la matematica è bella perché è semplice». Ma vorrei aggiungere che appare semplice soltanto se diventa un arricchimento ed una conquista personale; altrimenti la matematica si presenta come un ammasso confuso di regole quasi magiche, di ricette, analoghe alle ricette di cucina, ed ancora meno motivate e certo meno piacevoli nei loro risultati; una specie di sottobosco, di ginepraio intricato e dispersivo, che suscita reazioni di rigetto in molti ed il cui ricordo turba spesso i sonni dei giovani ed anche dei non più giovani. Freudenthal descrive questa situazione parlando di «mate-

matica come paniere di formule». Solo se la matematica diventa per noi trasparente e semplice se ne può apprezzare il fascino e si può fruire della sua suprema bellezza; e si giustifica anche la convinzione della esistenza di una dimensione umanistica della matematica. Una tesi questa che può suscitare il sorriso in certe persone che hanno dell'umanesimo una idea preconcepita ed abbastanza ristretta, ma che è resa bene da quella celebre frase di Platone, che dipingeva la natura divina della verità affermando che «Sempre Dio fa della geometria».

2. QUESTO LIBRO: LEZIONI TENUTE IN CINA

Il titolo dell'originale inglese accenna ad una specie di triplice carattere di questa, che è l'opera conclusiva dell'intera vita di Freudenthal: si direbbe che essa riassume, in una grande sintesi, le sue idee sulla matematica, i suoi punti di vista sull'apprendimento e sull'educazione, e le sue concezioni sull'insegnamento della matematica, o, per meglio dire, sull'educazione matematica. Infatti, come abbiamo detto, Freudenthal rifiuta l'insegnamento puramente addestrativo della matematica, e considera invece questa dottrina come un pilastro fondamentale della educazione globale dell'uomo. Questo libro è quindi una specie di testamento spirituale, che questo educatore e pensatore ci ha lasciato; e lo ha fatto riordinando ed esponendo le idee da lui esposte durante un ciclo di lezioni tenute in Cina, come si evince dal sottotitolo «China lectures», e come egli stesso dice nella premessa, intitolata «Apologia e spiegazione».

Come scrive Alan J. Bishop nella prefazione già citata, questo non è un libro che possa essere soltanto scorso superficialmente e letto frettolosamente: occorre entrare nello spirito dell'opera, e lasciarsi conquistare da essa. Infatti, ad una prima superficiale lettura, si può essere tentati di giudicare il discorso come frammentario ed a prima vista, per così dire, sfilacciato: abbondano i richiami e le citazioni dai propri lavori; si incontrano spesso ricordi di esperienze personali, e giudizi arguti sull'organizzazione degli studi nel suo Paese e negli altri. Ma quando ci si lascia coinvolgere dal discorso, e se ne comprende tutta la ricchezza e la profondità, la lettura diventa un'avventura affascinante. Infatti tutta l'opera è organicamente strutturata, e fondata su un pensiero coerente e valido; il pensiero di una persona che, fino all'ultimo, ha osservato e riflettuto, ha profittato delle esperienze proprie e delle altrui, ha esercitato la sua intelligenza nel comprendere e nel creare.

Inoltre la sua esposizione di argomenti seri è molto spesso condita da un sottile umorismo; valga un esempio, tra i tanti che si potrebbero citare: Freudenthal, ad un certo punto dice: «Ho spesso affermato che il fatto di conoscere troppo bene un capitolo di matematica può essere un serio ostacolo perché uno lo sappia insegnare in modo decente».

L'umorismo diventa ironia, spesso pungente ma anche troppo giustificata, quando Freudenthal parla dei sedicenti ricercatori di pedagogia e di didattica, e delle sciocchezze dei burocrati e dei metodologi; razze che evidentemente allignano in molti Paesi ed in molti ambienti.

I caratteri di quest'opera spiegano, spero, le grandi difficoltà della sua traduzione; questa osservazione è una specie di «captatio benevolentiae» che rivolgo al Lettore, il quale non mancherà di rilevare i difetti e le manchevolezze. Confesso che, durante il lavoro, molto spesso ho ricordato quel noto luogo comune (ben poco cavalleresco verso il gentil sesso) che assimila le traduzioni alle donne: queste sono divise in due sottoinsiemi, ad intersezione vuota: le belle e le fedeli. Di modo che, proprio a causa dell'intersezione vuota, le traduzioni belle non possono essere fedeli e le fedeli non possono essere belle.

Purtroppo, anche ammettendo, molto scortesemente, come ho detto, che i due insiemi non abbiano elementi comuni, esiste tuttavia la dolorosa possibilità che non sia vuota l'intersezione degli insiemi complementari; e cioè che la traduzione non sia nè bella nè fedele. È infatti molto difficile rendere in modo passabile lo stile colloquiale e personalissimo di Freudenthal, stile che si esplica spesso in periodi molto lunghi, e densi di incisi, allusioni e richiami. La prima impresa difficile è la traduzione del titolo, cercando di rendere lo spirito dell'opera.

Nel seguito cercherò di inquadrare in modo sommario il pensiero di Freudenthal secondo ciò che ho già detto brevemente; e precisamente accennando anzitutto alla sua concezione della matematica, ed in seguito al suo modo di vedere il fenomeno dell'apprendimento; queste due concezioni fondano poi le sue idee sulla didattica della matematica; il Lettore si accorgerà facilmente che queste idee sono molto originali, e soprattutto diverse da quelle correnti nel nostro Paese e che hanno informato i programmi ufficiali delle nostre scuole.

Questa è anche una delle ragioni che giustificano in parte questa presentazione del volume di Freudenthal: sarebbe infatti ingenuo e presuntuoso cercare di rendere chiaro o, in qualche modo, di volgarizzare e ampliare o correggere il pensiero del matematico olandese; ma questo pensiero mi pare talmente distante dalla mentalità e dalle opinioni correnti nel nostro Paese, a proposito di didattica della matematica e di educazione matematica, che forse può essere utile avviare in qualche modo il Lettore all'incontro con un modo di vedere e di operare che mi pare diverso da alcune tendenze didattiche correnti tra noi, tendenze a cui si ispira molta della manualistica odierna.

Dal confronto con il profondo pensiero e con l'opera di Freudenthal il Lettore avveduto potrà trarre le debite conclusioni per una opinione personale; non intendo suggerirla qui, perché ciò sarebbe contrario proprio a quelle concezioni di rispetto per l'intelligenza altrui che costituiscono una delle ragioni del fascino esercitato dalla figura e dal pensiero di Freudenthal.

3. LA MATEMATICA NEL PENSIERO DI FREUDENTHAL

Come ho detto sopra, la didattica di Freudenthal è fondata sulla concezione che egli ha della matematica. Il primo capitolo dell'opera che abbiamo sotto gli occhi contiene il pensiero del Nostro su questo argomento, e qui cercherò di sottolineare gli aspetti che più hanno attirato la mia attenzione.

Per Freudenthal la matematica è anzitutto una dottrina che ricerca la certezza, e la sua storia dimostra la costanza di questa ricerca, alla quale l'umanità non ha mai rinunciato; si direbbe che questa ricerca faccia parte del carattere fondamentale dell'uomo, e quindi l'attività matematica costituisca quasi un sintomo della sua natura profonda. In questo senso credo che si possa interpretare il titolo che Freudenthal appone al primo capitolo di questo libro: tale titolo parla di «fenomenologia della matematica».

La ricerca della certezza, che è tipica della matematica, dà a questa dottrina il carattere di un'attività mentale con sue caratteristiche proprie, le quali la fanno distinguere da altre attività, pure dirette alla conoscenza; questo fatto è ripetutamente espresso da Freudenthal con la frase «La matematica è diversa»; e vedremo che questa sua tesi fonda anche la sua dottrina dell'apprendimento e le sue vedute sulla didattica. Infatti appare chiaro che, se la matematica è diversa, il suo insegnamento deve essere pure diverso da quello che si impartisce per le altre dottrine; e che i progetti, le teorie e le teorizzazioni dei cultori di pedagogia e di didattica debbono tener conto di questo fatto fondamentale; come pure deve tenerne conto anche chi stila i programmi e formula i piani di studio per gli studenti.

Nella concezione di Freudenthal, questa ricerca della certezza, tipica della matematica, parte dal senso comune; ma un senso comune che non si limita all'accettazione delle sensazioni immediate, o delle idee abitualmente e generalmente recepite; invece la certezza della matematica nasce da un senso comune che è affinato dalla critica dell'esperienza immediata e delle credenze abituali.

Ma, nella mente di Freudenthal, il fatto di ricercare e di garantire la certezza è soltanto uno degli aspetti del pensiero matematico. Un secondo aspetto, molto importante, è dato dal fatto che il «fare matematica» è essenzialmente una attività. E questa sua convinzione ispira anche il suo atteggiamento nei riguardi dell'insegnamento della matematica. Infatti, se questa è attività, non si deve fare del suo insegnamento un insaccamento di nozioni ed un addestramento all'impiego di algoritmi e di procedure. Ritornerò nel seguito su questo argomento; qui aggiungo che l'attività del fare matematica si esplica costruendo certe strutture, attraverso le quali la nostra mente legge (per così dire) la realtà che osserviamo. Dal punto di vista didattico, l'attività della nostra mente nel costruire la matematica mediante la formazione di strutture è favorita quando, nell'operazione di matematizzazione, si parta da quelli

che Freudenthal chiama «contesti ricchi». Per questa ragione egli è nettamente contrario (ed a ragione, secondo il mio parere) all'atteggiamento didattico ispirato da quella che, nei recenti decenni, è stata abitualmente indicata come «Matematica Moderna».

È noto che, secondo questo atteggiamento, l'insegnamento dovrebbe partire dalla presentazione di strutture generalissime e molto astratte; si ottiene così, per esempio, quella ibrida dottrina che è stata denominata «insiemistica» e che ancora oggi fa bella mostra di sé in certi sussidiari di scuola elementare, stampati forse con la preoccupazione di novità ad ogni costo. Questa pratica di far cadere dall'alto una dottrina generalissima e preformata, insieme con il suo vocabolario tecnico e la sua struttura formale, incarna un atteggiamento che Freudenthal gratifica giustamente di antididattico.

Occorre riconoscere che la procedura di costruire la matematica a partire da quello che Freudenthal chiama il contesto più povero (l'insieme non strutturato), fabbricando via via degli insiemi più ricchi, fino ad arrivare alla matematica tradizionale, vista dall'alto, può apparire seducente agli occhi di un matematico puro. E ciò può spiegare anche, almeno in parte, l'adesione di molti matematici a certi progetti che miravano a tradurre, sul piano didattico, la grande ricostruzione bourbakista della matematica. Ripeto che un matematico accetta volentieri che si parta da concetti che appaiono come i più semplici ed elementari; concetti che nessuno può non capire. Ma questa costruzione della matematica, pur elegante nelle sue intenzioni, e stimolatrice di progresso per la ricerca, non è applicabile *sic et simpliciter* alla didattica; infatti non è detto per nulla che ciò che è concettualmente più semplice sia accettato e soprattutto ritenuto con maggiore facilità. Infatti osserva Freudenthal che la costruzione della matematica parte da contesti molto ricchi; che sono poi quelli che suscitano l'interesse del discente, e stimolano la costruzione di procedure conoscitive e di algoritmi di calcolo; questi ultimi oggetti mentali vengono re-inventati e quindi posseduti a lungo termine, diventano patrimonio intellettuale del discente e vengono ricostruiti quando per avventura fossero stati dimenticati. Anche lo sviluppo storico della matematica insegna che l'evoluzione di questa scienza è avvenuta proprio a partire da un contesto molto ricco, come quello offerto dalla geometria. Pertanto penso che Freudenthal abbia pienamente ragione quando deplora il fatto che la didattica della cosiddetta Matematica Moderna abbia praticamente cacciato la geometria dai programmi di insegnamento; adottando in questo l'atteggiamento tipico del Bourbaki, che ha esplicitamente proclamato la morte della geometria come dottrina matematica.

Invece per Freudenthal la didattica deve essere guidata dalla osservazione dei propri processi di apprendimento e da quelli degli altri; e soprattutto dalla meditazione sullo svolgimento storico della matematica; osservazione che ci mostra quali siano i contesti ricchi che hanno dato origine alla matematica

di oggi, e quali siano le linee di sviluppo più facili e naturali del pensiero matematico. Naturalmente ciò non significa che l'opera didattica debba riprodurre supinamente tutti i passi dello sviluppo storico della scienza nel suo formarsi e nel suo divenire; la intelligenza di chi svolge il lavoro didattico si manifesta proprio nell'utilizzare la lezione della storia senza riprodurre materialmente tutti i passi dell'evoluzione storica, e senza ricalcare tutti i segmenti del cammino, spesso tortuoso, della scienza.

4. IL PROCESSO DI APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

Come ho detto, la descrizione che Freudenthal dà del processo di apprendimento in matematica si riattacca alla sua concezione di questa scienza, e fonda poi la sua visione della didattica.

Secondo la concezione del matematico olandese, l'apprendimento della matematica avviene per salti (ovviamente intellettuali), cioè dà luogo a stati mentali distinti e discontinui. Questa osservazione può essere fatta da chiunque cerchi di ricordare la propria storia intellettuale, e da chi osservi con qualche attenzione lo sviluppo mentale degli altri. Nel caso dei bambini poi la cosa è evidente e fa parte dell'esperienza comune a tutti i genitori che dedichino un poco di attenzione a questi aspetti dello sviluppo mentale dei loro figli. Ma è facile accorgersi anche che cose molto analoghe avvengono a tutte le età, e soprattutto nell'età scolare. E poiché l'introspezione è spesso difficile, Freudenthal consiglia di abituarsi all'osservazione degli altri, e di giungere così alla osservazione dei propri processi mentali.

Strettamente collegata con l'osservazione dei salti nel processo di apprendimento è la teoria dei livelli mentali. Infatti Freudenthal osserva che, attraverso i salti nell'apprendimento, il discente raggiunge vari livelli di conoscenza matematica. Quegli strumenti concettuali ed algoritmici che ad un determinato livello sono utilizzati in pratica, e, per così dire, in modo puramente fattuale, diventano oggetto di riflessione metodica ad un livello superiore. In altre parole si potrebbe dire che ciò che ad un determinato livello di apprendimento è pratica, diventa oggetto di studio ad un livello superiore, che risulta essere metateorico rispetto al precedente.

Ciò si avvera in particolare per gli algoritmi, che vengono appresi, utilizzati ed applicati in modo paradigmatico, cioè attraverso esempi significativi e caratteristici; e debbono diventare oggetto di riflessione e di giustificazione ad un livello superiore.

L'idea centrale del pensiero di Freudenthal sull'apprendimento potrebbe essere espressa dicendo che esso è una appropriazione di strutture e di procedure che avviene attraverso la re-invenzione da parte di ogni soggetto; e l'attività del matematizzare si esplica e si realizza sostanzialmente quando il sog-

getto si appropriava delle idee e delle strutture re-inventandole in modo attivo.

Soltanto se si attua un apprendimento di questo tipo le nozioni si radicano nella mente, e gli algoritmi non sono puramente memorizzati in modo passivo, ma possono addirittura essere richiamati e ricostruiti se per avventura fossero stati dimenticati.

Nel presentare il proprio pensiero Freudenthal adotta la nomenclatura e le idee di A. Treffers, il quale ha introdotto i concetti di «matematizzazione orizzontale» e di «matematizzazione verticale».

5. LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Ciò che è stato esposto sommariamente nelle pagine precedenti spiega sufficientemente la posizione di Freudenthal sulla didattica, soprattutto nei riguardi dell'insegnamento della matematica a livello elementare; tuttavia penso che le sue idee abbiano una grande validità, che non si limita al livello elementare; precisamente sono convinto che esse possano essere utilmente applicate alla didattica della matematica ad ogni livello; e vorrei dire che dovrebbero essere applicate, superando le abitudini e le tradizioni che hanno influenzato fino ad ora questo settore della nostra scuola.

Infatti se, come abbiamo visto, l'apprendimento degno di questo nome è una re-invenzione attiva da parte dei soggetti, allora la didattica dovrebbe essere ispirata fundamentalmente dall'opera di guida della re-invenzione.

In questo ordine di idee l'insegnante deve guidare la appropriazione dei concetti e degli algoritmi. La procedura fondamentale per ottenere questo risultato discende dalla osservazione degli allievi, dei loro processi di apprendimento, della loro storia intellettuale. Questa osservazione degli altri fonda, come si è detto, anche la osservazione della propria evoluzione e del proprio processo di apprendimento. Infine la storia della umanità, ed in particolare la storia della matematica ci potrebbe guidare, per scegliere le vie più naturali dello sviluppo della personalità. Naturalmente, come abbiamo già osservato, ciò non significa che la matematica debba essere insegnata seguendo pedissequamente il cammino del suo sviluppo storico in tutti i suoi particolari; anzi, proprio la conoscenza della storia può farci accorciare i cammini inutilmente tortuosi, risparmiarci la fatica ed il disagio di imboccare delle strade a fondo chiuso; e soprattutto la storia ci indica quei contesti ricchi che sono i fondamenti sui quali si impianta la costruzione del grande edificio della matematica. Ritengo che questa posizione riecheggi il pensiero di D. Hilbert, il quale non esitò ad affermare che la nostra matematica non esisterebbe se non esistessero la fisica e la meccanica.

Penso che il grande matematico tedesco intendesse così riconoscere lo stimolo insostituibile che le scienze della realtà fisica hanno sempre esercitato

sulla matematica. E ciò mi richiama alla memoria il detto che afferma essere la geometria il primo capitolo della fisica; ossia, vorrei dire, il primo momento in cui l'uomo ordina in modo razionale le proprie osservazioni riguardanti il mondo esterno, enunciando senza dimostrazione le cose che egli ritiene «evidenti» e dimostrando razionalmente le altre. Una operazione questa che costituisce appunto il primo passo per introdurre una struttura razionale nell'universo che ci circonda.

Penso inoltre che nelle parole di Hilbert vi fosse l'esplicito riconoscimento del fatto che Freudenthal esprime parlando della matematica come attività: attività del matematizzare, cioè del conoscere qualche cosa con gli strumenti e le procedure che la matematica costruisce ed utilizza per raggiungere il suo ideale di conoscenza sicura e certa.

In questo ordine di idee, ripeto, la storia ci indica che l'aver declassato (ed in qualche caso addirittura cacciato) la geometria costituisce un grave errore storico e didattico. Sempre nello stesso ordine di idee, ricordo che Freudenthal si dichiara nettamente contrario alla procedura didattica oggi tanto di moda, che prescrive di partire da concetti i più generali ed i più astratti possibile, come quello di insieme, per costruire artificialmente un mondo di rapporti logici schematici, illustrato da diagrammi di Eulero; questo mondo dovrebbe poi essere arricchito dal di fuori, con l'aggiunta esterna di strutture imposte dai docenti, sulla falsariga di una gerarchia che è stata stabilita una volta per tutte.

Sulla scorta di queste idee Freudenthal analizza qualche sistema didattico che è stato presentato e messo in opera negli ultimi tempi. Egli dice giustamente che le teorie didattiche proposte hanno i loro fondamenti in certe implicature filosofiche che le ispirano, e che si possono spesso mettere in evidenza con relativa facilità, anche se non sempre sono dichiarate. In sostanza, con queste sue analisi, Freudenthal mette in pratica quella sua visione dell'insegnamento che abbiamo ricordato sopra, riportando le parole con le quali egli afferma che il valore che si attribuisce ai discenti come esseri umani determina poi il modo in cui ci si aspetta che essi imparino la loro matematica. E vorrei aggiungere che certe didattiche, che fanno perno sul puro addestramento all'impiego degli algoritmi, rivelano chiaramente i fondamenti filosofici sui quali si appoggiano e la concezione dell'uomo che li ispira.

Ancora più chiaro è il pensiero che ispira certi piani didattici nei quali la procedura è prescritta minuziosamente, nei minimi particolari; il che potrebbe anche favorire la pigrizia degli insegnanti, dei quali si direbbe che aspirano ad essere sostituiti al più presto da macchine programmate nei minimi passi. Mi pare di poter intravedere il nocciolo delle idee di Freudenthal sulla didattica ricordando ciò che ho già detto ripetutamente parlando di «reinvenzione»; precisamente il Nostro precisa più volte che la reinvenzione deve essere guidata; ed io vorrei anche aggiungere che la reinvenzione non può

essere imposta, per una ovvia contraddizione nei termini. In questa guida alla reinvenzione, che è fondamento di appropriazione, sta la caratteristica principale del lavoro dell'insegnante, il quale deve costantemente trarre dalle sue conoscenze, e dalla osservazione di se stesso e dei discenti la regola per il proprio lavoro. Sempre in questo ambito vorrei anche ricordare che Freudenthal accenna più volte alla problematica relativa all'impiego ragionevole delle macchine e degli apparati di calcolo. Si tratta di una questione che io ritengo molto importante, e che ha suscitato molti entusiasmi ed interessi. Senza insistere nel trattare questi problemi, vorrei limitarmi a dire qui che la loro soluzione non può e non deve ridursi a procedure di puro addestramento all'impiego degli apparati.

6. ALCUNE CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Ho detto sopra che lascio al Lettore intelligente il compito di trarre le conclusioni dal confronto tra il pensiero di Freudenthal e la situazione dell'insegnamento della matematica nel nostro Paese. A questo proposito ricordo di aver scritto, molto tempo fa, un articolo in cui esprimevo le mie perplessità sull'insegnamento della cosiddetta «insiemistica» nella scuola elementare. Oggi quelle perplessità sono condivise da vari ricercatori, e chi le esprime non viene più trattato come un ignorante retrogrado, come all'epoca citata. Analoghe perplessità si potrebbero esprimere oggi nei riguardi di quel «Piano nazionale per l'informatica» che non pare abbia compiuto quella rivoluzione intellettuale e culturale che vari neofiti entusiasti dimostravano di considerare come una inevitabile e quasi fatale conseguenza del culto assiduo del feticcio «computer».

Non credo che sia questo il luogo per una vana (ed in definitiva inutile) polemica su questi argomenti. Penso tuttavia che si possa tentare di rispondere ad una eventuale osservazione, a proposito dell'opera che sto presentando. Qualcuno infatti potrebbe pensare, e forse anche dire, che il pensiero di Freudenthal può avere una grande validità, ma che la sua efficacia è limitata ai problemi dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica a soggetti in età infantile e preadolescenziale. Pertanto, secondo questa opinione, le sue idee non potrebbero trovare applicazione nelle scuole dell'ordine secondario, e meno ancora nei corsi dell'ordine universitario. Una opinione cosiffatta mi pare abbastanza affrettata, come è facile mostrare. Infatti anzitutto, se si accetta l'impostazione che Freudenthal dà dell'insegnamento della matematica nella età infantile e preadolescenziale, occorrerebbe rivedere a fondo il sistema della presentazione della matematica e del suo insegnamento nella scuola che prepara gli insegnanti della scuola elementare. È ben noto che la materia nel nostro Paese oggi è, come si suol dire, allo stato

fluido; e ciò a causa della situazione della nostra scuola, situazione che potrebbe essere descritta con le parole «riforma perpetua» o, meglio, «progetto perpetuo e stato di attesa perpetua di riforma». Se poi verranno attuate le varie leggi di «diplomi universitari» (o «lauree brevi» che dir si voglia), il problema si riproporrà a livello universitario. Penso infatti che in questi corsi la matematica debba essere insegnata con un taglio che tiene conto in modo esplicito e primario della preparazione all'insegnamento; e penso anche che in questo campo le idee, pur pregevoli, dei cultori di pedagogia possano utilmente essere confrontate ed integrate con quelle dei cultori di matematica. Io mi auguro che in questa cooperazione interdisciplinare si tenga conto di quella idea fondamentale che, come ho detto, Freudenthal ha espresso così bene e così frequentemente in questo suo libro: la matematica è diversa, e quindi va insegnata con procedure *ad hoc*, che non possono, e quindi non debbono, essere ricalcate sulle procedure che la pedagogia ufficiale propone e difende per le altre materie.

Ma penso che la tesi di Freudenthal più importante sia quella che egli esprime parlando di re-invenzione; e mi pare che questa idea abbia un suo fondamentale valore per l'insegnamento a tutti i livelli di scuola. Per spiegare meglio ciò che intendo dire, ricordo che Freudenthal afferma argutamente che se si domanda ad un matematico come egli legge le opere dei suoi colleghi ricercatori, risponderà che ben presto, dopo aver iniziato la lettura, egli cerca di ritrovare per conto suo, e con i propri mezzi, i risultati enunciati nell'opera che sta leggendo. In altre parole questa operazione di re-invenzione e di ricreazione avviene a tutti i livelli di cultura matematica, quando si vuole veramente appropriarsi delle idee, e fare in modo che diventino nostre.

Quindi le idee che Freudenthal qui esprime così bene e difende così efficacemente sono valide non soltanto per l'insegnamento della matematica a livello elementare, ma anche (e direi ancora più) per l'insegnamento a livello secondario ed oso perfino dire universitario. Freudenthal dice di aver osservato studenti delle scuole secondarie superiori che applicano molto bene le regole del calcolo differenziale ed integrale, ma non sanno cavarsela con l'algebra elementare. Si tratta di sue esperienze personali, ma che non mi sembrano per nulla limitate alla sua cerchia di lavoro. È facile, per esempio, anche da noi accertarsi del significato e della profondità di certe preparazioni matematiche che credono di essere ad alto livello: mi è capitato varie volte il caso di studenti universitari, che hanno superato con votazione brillante un determinato esame di un corso monografico del secondo biennio, ma che, poche settimane dopo l'esame, non sanno riferire neppure in modo sommario ed approssimato degli argomenti sui quali il corso verteva; molto frequente pure è il caso di laureati brillantemente in matematica i quali, a distanza di poche settimane dalla laurea, non sanno dare spiegazioni ed informazioni, sia pure in modo approssimato e sommario, sull'argomento della loro Tesi.

A mio parere, non si tratta per nulla di deficienza d'intelligenza e di assiduità nello studio da parte di questi soggetti; invece mi pare lecito pensare che i corsi ad altissimo livello che figurano nel curriculum prestigioso dei nostri laureati hanno forse dato alla loro intelligenza un atteggiamento tale che essi si trovano poi talvolta impacciati se debbono eseguire una semplicissima operazione di matematizzazione di un'esperienza elementare, comune e quotidiana.

È ben vero che nelle nostre università esistono anche i corsi di matematiche elementari da un punto di vista superiore. Ma credo di poter dire che essi sono scelti da una minoranza di studenti in matematica, i quali pure, nella loro maggioranza, dovranno avviarsi alla carriera dell'insegnamento. E vorrei aggiungere che, anche nello svolgere corsi di questo tipo, si possono adottare diversi atteggiamenti: si può insegnare in modo da far vedere il quadro generale della materia che gli studenti dovranno insegnare, così che essi siano poi in grado di guidare quella reinvenzione che Freudenthal considera come un momento essenziale dell'apprendimento della matematica; infatti soltanto vedendo dall'alto la meta finale si può scegliere la strada giusta e guidare gli altri alla sua scelta autonoma. Ma si può anche tenere un corso cosiffatto ad un eccessivo livello di astrazione e di generalità. Si sprecherebbe così una preziosa occasione per la formazione dei futuri insegnanti, capaci di insegnare una matematica che io vorrei chiamare ragionevole e quindi formativa. Di conseguenza non ci si può più stupire se, nella mente della maggioranza, abita una immagine distorta della matematica, che è vista come un pacchetto, un paniere di formule, di procedure e di algoritmi memorizzati ma non motivati e compresi; immagine che, come ho detto già, si accompagna spesso ad incubi e produce nei più delle reazioni di allergica ripugnanza e di frustrazione.

Il che, del resto, non deve essere una cosa nuova, se è vera quella storiella che ho sentito raccontare, mi pare a proposito di D'Alembert, il quale troncò la discussione con un allievo che non capiva, e quindi non credeva nella validità delle conclusioni, con la celebre frase: «Allez, jeune homme; la foi vous viendra». Atteggiamento forse giustificato dalla stanchezza dell'insegnante, ma certo non adatto per ispirare una mentalità matematica.

Mi pare invece di poter chiudere queste pagine ricordando ciò che Pietro Abelardo scriveva molti secoli fa; secondo il filosofo medievale, la pienezza della conoscenza di una dottrina si misura dalla capacità di saperla trasmettere, perché chi sa soltanto per se stesso è da considerarsi come se non sapesse nulla:

«Scit sibi non aliis qui nescit scita docere;
tamquam nihil sciens talis habendus est».

*Carlo Felice Manara
Università di Milano*